STAT0041: Stochastic Calculus

Lecture 12 - Stochastic Differential Equations

Lecturer: Weichen Zhao　　Fall 2025

Key concepts:

- 随机微分方程;
- 解的存在唯一性。

12.1 Introduction

设$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathrm{P})$为一个带流的概率空间，$B_t$ 为一个$\mathscr{F}_t$-布朗运动。我们考虑如下形式的Itô 随机微分方程 (stochastic differential equation, SDE)

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t. \tag{12.1}$$

事实上，这应该是一个积分方程：

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \tag{12.2}$$

其中$b(t,x)$称为漂移系数*(drift coefficient)*，$\sigma(t,x)$ 称为扩散系数*(diffusion coefficient)*，均为$\mathscr{F}_t$适应的。

Example 12.1 (Ornstein–Uhlenbeck过程) 考虑一个粒子在液体中运动，其速度为v，由*Stokes* 定律，它受到液体对它的粘滞力为$-bv$，其中$b > 0$为粘滞系数，设m为粒子的质量，则由牛顿运动第二定律

$$m\dot{v} = -av.$$

除了宏观的粘滞力外，液体分子的随机运动对粒子杂乱的作用效果可以十分清楚的表现出来，因此，我们考虑在上述方程中加入随机力的作用

$$m\dot{v} = -av + F(t)$$

其中$F(t)$是一个随机力，同时除以m，方程变化为

$$\dot{v} = -\frac{a}{m}v + \frac{F(t)}{m}$$

*Langevin*力$\frac{F(t)}{m}$数学上建模为“白噪声”，用随机微分方程建模即是

$$\begin{cases} dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t \\ X_0, \end{cases} \tag{12.3}$$

称为*Ornstein–Uhlenbeck* 奥恩斯坦-乌伦贝克过程，X_t 即是粒子的速度。

Proof: 我们现在求解一下OU过程。

考虑常微分方程：

$$dX_t = -bX_t dt, \qquad X_0$$

计算积分因子：

$$\mu(t) = e^{\int b dt} = e^{bt}$$

那么方程两边同时乘以e^{bt}，

$$e^{bt}\frac{dX_t}{dt} + be^{bt}X_t = \frac{d}{dt}\left(e^{bt}X_t\right) = 0$$

积分解得X_t为

$$X_t = X_0 e^{-bt}$$

同样地，对OU过程

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t$$

令$Z_t = e^{bt}X_t$，由Itô公式

$$\begin{aligned} dZ_t &= df(t, X_t) \\ &= \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial X_t}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial X_t}^2 (dX_t)^2 \\ &= \partial_t[e^{bt}X_t]dt + \partial_{X_t}[e^{bt}X_t]dX_t + 0 \\ &= be^{bt}X_t dt + e^{bt}dX_t \\ &= be^{bt}X_t dt + e^{bt}(-bX_t dt + \sigma dB_t) \\ &= \sigma e^{bt} dB_t \end{aligned}$$

两边0到t积分，可得

$$X_t = X_0 e^{-bt} + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} dB_s$$

■

Example 12.2 (几何布朗运动) 设S_t为时间t时股票的价格，可以通过几何布朗运动*(Geometric Brownian Motion)*建模S_t

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

其中μ描述股票的平均回报率，σ描述股票价格的波动率。

Proof: 设$X_t = \ln(S_t)$，由Itô公式，

$$\begin{aligned} dX_t &= df(t, S_t) \\ &= \frac{\partial f(t,S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t,S_t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t,S_t)}{\partial S_t}^2 (dS_t)^2 \\ &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2 \end{aligned}$$

由于

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

$$(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$$

所以

$$dX_t = \frac{\mu S_t \,\mathrm{d}\, t + \sigma S_t \,\mathrm{d}\, W_t}{S_t} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S_t^2 \,\mathrm{d}\, t}{S_t^2}$$

整理可得

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dB_t$$

两边积分

$$X_t = X_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t$$

所以股票价格

$$S_t = e^{X_t} = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right)$$

■

注. 非线性的SDE是非常难解的，一般没有显式解，有显式解的一般也需要敏锐的直觉去猜，这和非线性常微分方程是一致的，对解SDE感兴趣的同学可以参考下面专著

Kloeden, P. E. and Platen, E. 1999. Numerical Solution to Stochastic Differential Equations.

12.2 解的存在唯一性

Theorem 12.3 (强解的存在唯一性) *若漂移系数 b 和扩散系数 σ 满足以下条件：*

(1) (线性增长条件) *存在常数C，使得*

$$|b(t,x)|+|\sigma(t,x)|\leqslant C(1+|x|),\quad \forall x\in\mathbb{R}^n, t\in[0,T],$$

(2) (全局 Lipschitz 条件) *存在常数K，使得*

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leqslant K|x-y|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n, t\in[0,T]$$

则对任意 $\mathscr{F}_0$-可测随机变量ξ，存在唯一$\mathscr{F}_t$适应的X_t，满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b\left(t,X_t\right)\mathrm{d}t+\sigma\left(t,X_t\right)\mathrm{d}B_t, \\ X_0=\xi. \end{cases}$$

Proof: 与常微分方程理论类似, 利用 Picard 迭代证明解的存在性, 由 Gronwall 不等式证明解的唯一性.

参考高洪俊《随机微分方程导论》5.2节，或者 Oksendal 5.2节 ■

注1. 唯一性是概率意义下的，即

$$\mathrm{P}(X_t=\tilde{X}_t,\forall t>0)=1.$$

注2. (强解和弱解的区别) 强解要求是在同一个概率空间下，由相同的布朗运动驱动，也就是概率空间和布朗运动是给定的。这样，解的唯一性是指轨道唯一性。

对于弱解来说，仅仅知道b和σ的形式，需要构造带滤子流概率空间和$\mathscr{F}_t$适应的布朗运动。这样，解的唯一性是指分布唯一性。